



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Poređenje kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti u XY spinskim lancima sa Đalošinski-Morija interakcijom i uočavanje kvantnog faznog prelaza

Sonja Gombar

Departman za fiziku

2018.

Elementarni uvod u svet kvantne informatike

- Osnovni cilj: proširenje mogućnosti u informatičkom svetu, skraćivanje aktivnog vremena izvršenja
- Gordon Mur (1965): snaga procesora dupliraće se na okvirno svake dve godine uz konstantnost cene
- Moguće rešenje: paralelizacija, KVANTNI RAČUNARI
- Misao oblikovana 1982. godine (Richard Fajman), nastavak Dejvid Dajč
- Algoritmi Pitera Šora i Lova Grovera
- Blagodeti: kvantna kriptografija, kvantna teleportacija, "gusto" kodiranje
- D-Wave 2000Q računar
- Višekubitni spinski sistemi - najčešći sistem za simulaciju kvantnog računara
- XY i XYZ sistemi frustrirani Đalošinski-Morija interakcijom
- Veza kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti kao posledica kvantne superpozicije i uočavanje kvantnog faznog prelaza posredstvom veličina kvantne informatike

Zamršena stanja

- Šmitova dekompozicija stanja:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} d_{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle \quad (1)$$

- Dekompozicija singularne vrednosti:

$$\tilde{D} = UDY^\dagger \quad (2)$$

- Razlikovanje zamršenih od separabilnih stanja pomoću Šmitovog koeficijenta:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |v_i^S\rangle \otimes |w_i^S\rangle \quad (3)$$

- Stanja Belovog bazisa:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (4)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (5)$$

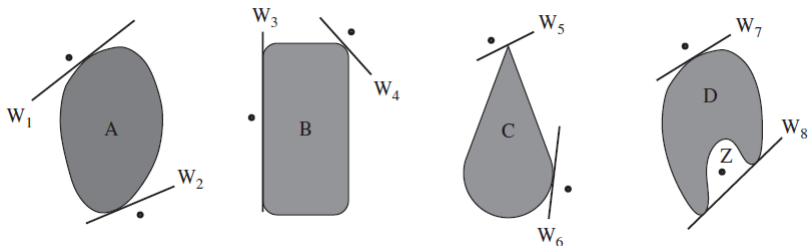
Svedoci zamršenosti

- Osnovna ideja: razgraničavanje separabilnih i zamršenih stanja
- Uobičajeni uslov za separabilna stanja:

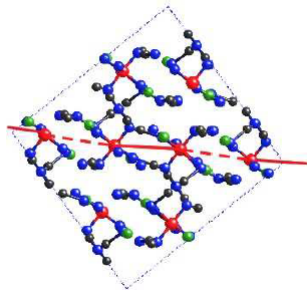
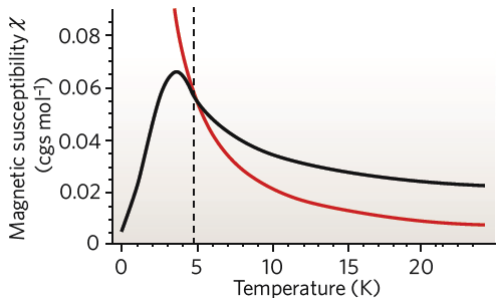
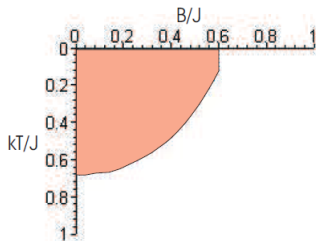
$$\langle \Psi_s | W | \Psi_s \rangle \geq 0 \quad (6)$$

te su sigurno zamršena:

$$\text{Tr}(\rho W) < 0 \quad (7)$$



Primeri svedoka zamršenosti



Mere zamršenosti

- Osobine koje zadovoljavaju validne mere zamršenosti:
 - 1 $E(\rho) = 0$ samo ako je ρ separabilno stanje,
 - 2 lokalne unitarne operacije ostavljaju $E(\rho)$ invarijantnim:
 $E(\rho) = E(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)$,
 - 3 $\sum_i \text{Tr}(\rho_i) E\left(\frac{\rho_i}{\text{Tr}(\rho_i)}\right) \leq E(\rho)$, gde je $\rho_i = V_i \rho V_i^\dagger$ sa uslovom $\sum_i V_i^\dagger V_i = I$
- Validne veličine: zamršenost formacije (*entanglement of formation*), zamršenost destilacije (*entanglement of distillation*), relativna entropija zamršenosti (*relative entropy of entanglement*)
- Najčešća u upotrebi - zamršenost formacije:

$$E_f(\rho) = -\text{Tr} \rho^A \log_2 \rho^A \quad (8)$$

za mešana stanja definisana u obliku:

$$E_f(\rho) = \inf \sum_i p_i E_f(\rho_i) \quad (9)$$

Konkurentnost

- Veza između zamršenosti formacije i konkurentnosti (dvokubitni sistemi):

$$E_f(\rho) = E(C(\rho)) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2}\right) \quad (10)$$

gde je $h(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$

- Konkurentnost:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (11)$$

gde su λ_i ($i = 1 \dots 4$) kvadratni koreni svojstvenih vrednosti matrice $R = \rho \tilde{\rho}$ u opadajućem poretku, a matrica $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} = (\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^* (\sigma^y \otimes \sigma^y) \quad (12)$$

Mere koherentnosti

- Nekoherentna stanja:

$$\delta = \sum_{i=0}^{d-1} p_i |i\rangle\langle i| \quad (13)$$

- Nekoherentne operacije: set Krausovih operatora $\{K_n\}$, koji zadovoljavaju $\sum_n K_n^\dagger K_n = I$, za koje važi $K_n \mathcal{I} K_n^\dagger \subset \mathcal{I}$ za sve n
- Osobine koje zadovoljavaju validne mere koherentnosti:
 - 1 $C(\rho) \geq 0$ za sva kvantna stanja, dok znak jednakosti važi samo u slučaju kada je stanje nekoherentno, tj. $\rho \in \mathcal{I}$,
 - 2 monotonost pod Φ_{ICPTP} mapiranjima: $C(\rho) \geq C(\Phi_{\text{ICPTP}}(\rho))$,
 - 3 monotonost srednje koherentnosti pod podselekcijom baziranom na rezultatima merenja: $C(\rho) \geq \sum_n p_n C(\rho_n)$, gde su ρ_n i p_n definisani relacijama (3.3) i (3.4) i
 - 4 funkcija ne raste pri mešanju kvantnih stanja: $\sum_i p_i C(\rho_i) \geq C(\sum_i p_i \rho_i)$ za ma koji set stanja $\{\rho_i\}$ i $p_i \geq 0$ sa uslovom $\sum_i p_i = 1$
- Validne mere: l_1 norma koherentnosti (l_1 norm), relativna entropija koherentnosti (*relative entropy of coherence*)

Relativna entropija koherentnosti

- Osnovna definicija:

$$C_{\text{re}}(\rho) = \inf_{\delta \in \mathcal{I}} S(\rho \| \delta) \quad (14)$$

- Pogodniji oblik:

$$C_{\text{re}}(\rho) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) \quad (15)$$

- Ograničenje relativne entropije koherentnosti:

$$C_{\text{re}}(\rho) \leq S(\rho_{\text{diag}}) \leq \log_2 d \quad (16)$$

Veza kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti

- Kvantna koherentnost još uvek mlada - pogodno naći vezu
- Poreklo: kvantna superpozicija, drugačija interpretacija
- Veza između entropije i koherentnosti:

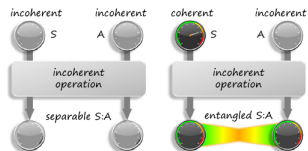
$$C_{\text{re}}(\rho) + S(\rho) \leq \log_2 d \quad (17)$$

- Povezanost između relativne entropije koherentnosti i zamršenosti formacije:

$$E(\rho^{AB}) + C_{\text{re}}(\rho^A) \leq \log_2 d^A \quad (18)$$

- Strestlov i saradnici (2015) - stvaranje zamršenosti pomoću nekoherentnih operacija
- Dolaze do relacije:

$$E_D^{SA}(\Phi^{SA}(\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A)) \leq C_D(\rho^S) \quad (19)$$



XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije

- DM interakcija - Đalošinski ju je apstraktno postavio, a Morija uobličio kao nezanemarljiv entitet u brojnim fizičkim sistemima (npr. CsCuCl₃)
- Hamiltonijan:

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^2 \left((1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + D(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right) \quad (20)$$

- Osnovno stanje - dvostruko degenerisano sa energijom i svojstvenim funkcijama:

$$E_0 = -\frac{J}{\sqrt{2}} q, \quad q = \sqrt{1 + D^2 + \gamma^2} \quad (21)$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}q} \sqrt{D^2 + 1} \left(-\frac{q}{\sqrt{2}(1+iD)} |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{1+iD} |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{q}{\sqrt{2}(1+iD)} |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \right) \quad (22)$$

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}(1-iD)}{q} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\sqrt{2}\gamma}{q} |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle \right) \quad (23)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije

- Odgovarajuće matrice gustine daju analogne rezultate - koristiće se prva:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+iD}{2\sqrt{2}q} \\ 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-iD)}{2q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+iD}{2\sqrt{2}q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+iD}{2\sqrt{2}q} & \frac{\gamma(1+iD)}{2q^2} & 0 & -\frac{1+iD}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije

- Odgovarajuća redukovana matrica gustine:

$$\rho^{13} = \text{Tr}_2 \rho = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-iD)}{2q^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\gamma(1+iD)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

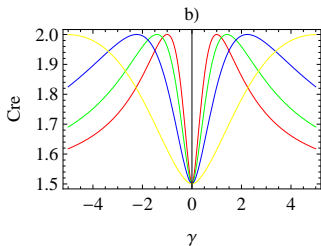
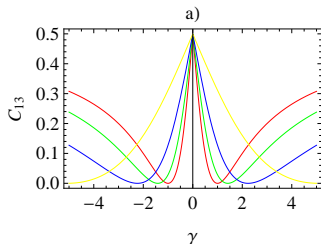
- Odgovarajuća relacija za konkurentnost:

$$C_{13} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{(1+D^2)\gamma^2}{q^4}} \quad (26)$$

- Odgovarajuća relacija za relativnu entropiju koherentnosti:

$$C_{\text{re}} = 1 - \frac{\gamma^2}{2q^2} \log_2 \left(\frac{\gamma^2}{2q^2} \right) - \frac{1+D^2}{2q^2} \log_2 \left(\frac{1+D^2}{2q^2} \right) \quad (27)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije



XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije

- Uopštenje na veće sisteme - metod kvantne renormalizacione grupe
- Kreće se od hamiltonijana sa N čvorova:

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^N \left((1+\gamma)\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + (1-\gamma)\sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + (-1)^i D(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right) \quad (28)$$

sa neophodnom transformacijom:

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^N \left((1+\gamma)\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - (1-\gamma)\sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + D(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right) \quad (29)$$

- Kadanovljev pristup - razdvajanje na blokovski i međublokovski hamiltonijan:

$$H = H^B + H^{BB} \quad (30)$$

- Koristi se transformacija:

$$H_{\text{eff}} = T^\dagger H^{BB} T \quad (31)$$

$$T = \sum_I T_I, \quad T_I = |\Psi\rangle_I \langle \uparrow | + |\Psi'\rangle_I \langle \downarrow |, \quad T_I^\dagger = | \uparrow \rangle_I \langle \Psi | + | \downarrow \rangle_I \langle \Psi' | \quad (32)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije

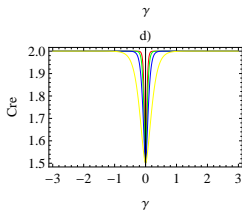
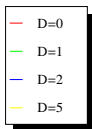
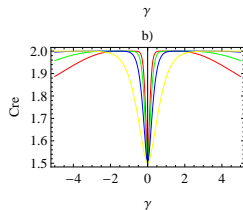
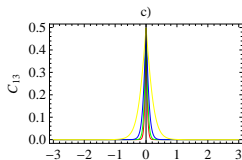
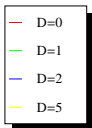
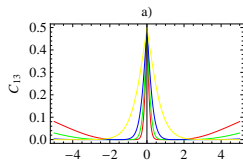
- Efektivni hamiltonijan:

$$H_{\text{eff}} = \frac{J'}{4} \sum_{j=1}^{N/3} \left((1+\gamma')\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x - (1-\gamma')\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + D'(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^y + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^x) \right) \quad (33)$$

gde su renormalizovani parametri:

$$J' = \frac{1 + D^2 + 3\gamma^2}{2q^2} J, \quad \gamma' = \frac{3\gamma + 3\gamma D^2 + \gamma^3}{1 + D^2 + 3\gamma^2}, \quad D' = -D \quad (34)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju simetrične anizotropije



Uplitanje *single ion* anizotropije

- Magnetokristalna anizotropija
- Oblik *single ion* anizotropije:

$$H_{SI} = - \sum_i A_i (S_i^z)^2 \quad (35)$$

- Rezultat: trivijalni dodatak - pomeranje osnovnog stanja na energijskom nivou i dobijanje analognih pripadnih svojstvenih funkcija

$$E_0 = \frac{AJ}{4} - \frac{q|J|}{\sqrt{2}} \quad (36)$$

- *Single ion* anizotropija ne utiče na razmatrane kvantno-informatičke veličine.

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju asimetrične anizotropije

- Hamiltonijan:

$$H = \frac{\tilde{J}}{4} \sum_{i=1}^2 \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + M \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \tilde{D} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right) \quad (37)$$

- Veza sa prvim izborom hamiltonijana:

$$\tilde{J} = (1 + \gamma)J, \quad \tilde{D} = \frac{D}{1 + \gamma}, \quad M = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (38)$$

- Dobijeno dvostruko degenerisano osnovno stanje:

$$E_0 = -\frac{1}{2} \tilde{J}m, \quad m = \sqrt{1 + 2\tilde{D}^2 + M^2} \quad (39)$$

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{4\tilde{D}^2 + (-1+M)^2}}{2m} \left(\frac{im}{2\tilde{D} + i(-1+M)} |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{i(1+M)}{2\tilde{D} + i(-1+M)} |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{im}{2\tilde{D} + i(-1+M)} |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \right) \quad (40)$$

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{-1+2i\tilde{D}+M}{m} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{1+M}{m} |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle \right) \quad (41)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju asimetrične anizotropije

- Odgovarajuće matrica gustine ponovo daju iste rezultate i prva je:

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1+M}{4m} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} \\ 0 & -\frac{1+M}{4m} & \frac{(1+M)^2}{4m^2} & 0 & -\frac{1+M}{4m} & 0 & 0 & \frac{-2i\tilde{D}(1+M)-(M^2-1)}{4m^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1+M}{4m} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} & \frac{2i\tilde{D}(1+M)-(M^2-1)}{4m^2} & 0 & \frac{-2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} & 0 & 0 & \frac{4\tilde{D}^2+(-1+M)^2}{4m^2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju asimetrične anizotropije

- Odgovarajuća redukovana matrica gustine:

$$\rho^{13} = \begin{bmatrix} \frac{(1+M)^2}{4m^2} & 0 & 0 & \frac{-2i\tilde{D}(1+M)-(M^2-1)}{4m^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2i\tilde{D}(1+M)-(M^2-1)}{4m^2} & 0 & 0 & \frac{4\tilde{D}^2+(-1+M)^2}{4m^2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

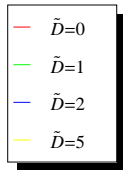
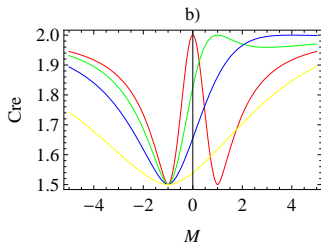
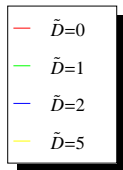
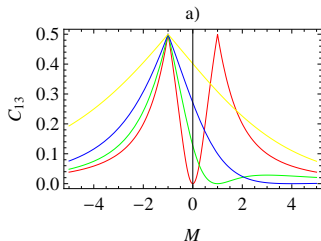
- Odgovarajuća relacija za konkurentnost:

$$C_{13} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{(1+M)^2(1+4\tilde{D}^2-2M+M^2)}{4m^4}} \quad (44)$$

- Odgovarajuća relacija za relativnu entropiju koherentnosti:

$$C_{re} = 1 - \frac{(1+M)^2}{4m^2} \log_2 \left(\frac{(1+M)^2}{4m^2} \right) - \frac{4\tilde{D}^2+(-1+M)^2}{4m^2} \log_2 \left(\frac{4\tilde{D}^2+(-1+M)^2}{4m^2} \right) \quad (45)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju asimetrične anizotropije



XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju asimetrične anizotropije

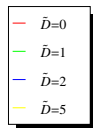
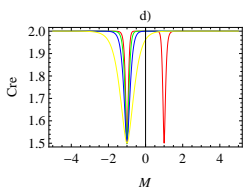
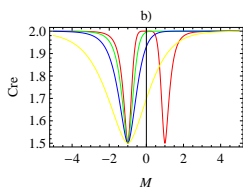
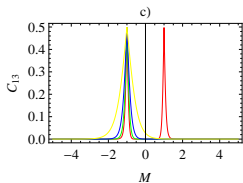
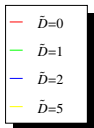
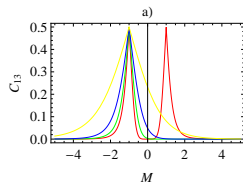
- Uopštenje na veće sisteme - efektivni hamiltonijan:

$$H_{\text{eff}} = \frac{\tilde{J}'}{4} \sum_{i=1}^{N/3} \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + M' \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \tilde{D}' (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right) \quad (46)$$

gde su renormalizovani parametri:

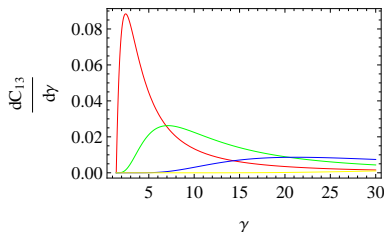
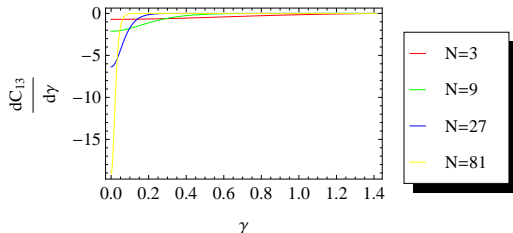
$$\tilde{J}' = \tilde{J} \frac{1 + \tilde{D}^2(2+M)}{m^2}, \quad M' = \frac{\tilde{D}^2 + 2\tilde{D}^2 M + M^3}{1 + 2\tilde{D}^2 + \tilde{D}^2 M}, \quad \tilde{D}' = -\tilde{D} \frac{1 + \tilde{D}^2 + M + M^2}{1 + 2\tilde{D}^2 + \tilde{D}^2 M} \quad (47)$$

XY Hajzenbergov model sa DM tipom interakcije u slučaju asimetrične anizotropije

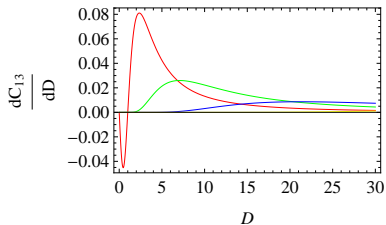
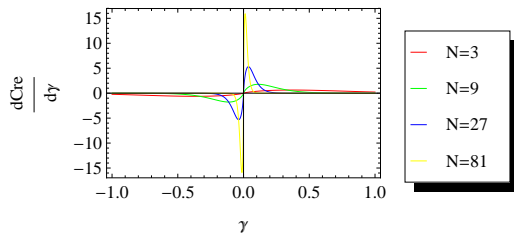


Registrovanje kvantnih faznih prelaza

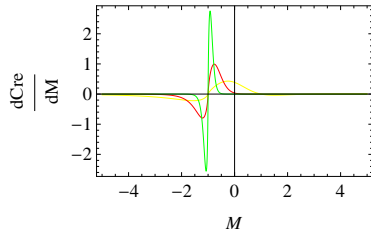
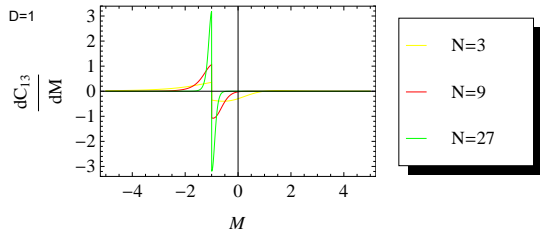
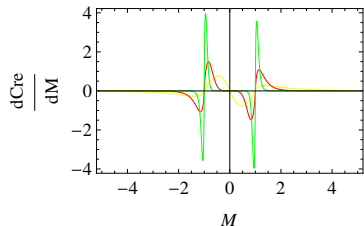
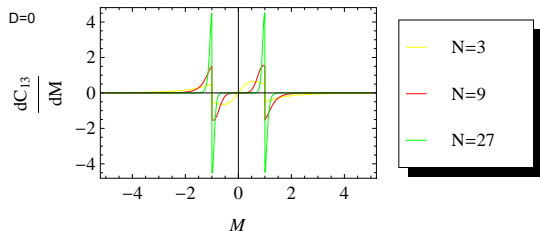
- Wu i saradnici - divergencija parne konkurentnosti naznaka je KFP I vrste, a u slučaju njenog prvog izvoda reč je o KFP II vrste



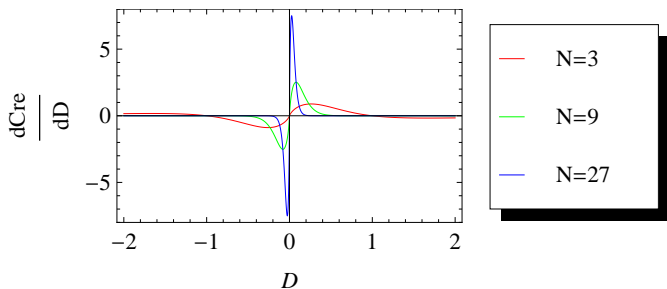
Registrovanje kvantnih faznih prelaza



Registrovanje kvantnih faznih prelaza



Registrowanje kvantnih faznih prelaza



Zaključak

- Zamršenost je već duže intrigantan entitet.
- Koherentnost teži da postane.
- Pogodno bi bilo naći korelaciju između dve pojave.
- U XY spinskim sistemima sa simetričnim i asimetričnim oblikom anizotropije dolazi do obrnutog ponašanje kvantno-informatičkih entiteta.
- Dvokubitni sistemi imaju konstantnu vrednost obe veličine u slučaju osnovnog stanja i stoga nisu posebno razmatrani, ali ne odudaraju od donetih zaključaka vezanih za sisteme bazirane na tri kubita.
- Ostaje pitanje porekla ovakve veze.
- Promenom DM interakcije može se indukovati kvantni fazni prelaz u slučaju XY spinskih lanaca sa asimetričnim oblikom anizotropije, za razliku od simetričnog izbora.